Tentamen Analyse
Maandag 31/10/11, 09.00–12.00 uur

(1) Hoe luidt de "Nested Interval Property"? Geldt deze eigenschap ook voor open intervallen?

(2) Neem aan dat $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Toon aan dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{convergeert} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \quad \text{convergeert.}$$

Aanwijzing: voor $(\Leftarrow)$ laat zien dat $a_n \to 0$ als $n \to \infty$.

(3) Laat de functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu zijn met

$$f(a) \leq a, \quad f(b) \geq b.$$

Toon aan dat er een punt $c \in [a, b]$ bestaat met $f(c) = c$.

(4) Laat de functie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn en neem aan dat $f'(x) \to 0$ als $x \to \infty$. Toon aan dat de functie $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = f(x+1) - f(x)$ voldoet aan $g(x) \to 0$ als $x \to \infty$.

(5) Bepaal op het aangegeven interval $I \subset \mathbb{R}$ de puntgewijze limiet van de rij functies $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, en ga na of de convergentie uniform is:

(a) $I = [0, 1]$ met $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$;
(b) $I = [-1, 1]$ met $f_n(x) = e^{-x^2}/n$;
(c) $I = \mathbb{R}$ met

$$\begin{cases} f_n(x) = 0, & x \leq n, \\ f_n(x) = x - n, & x \geq n. \end{cases}$$

(6) Toon aan dat de alternerende reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan x}{n}, \quad x \in [0, \infty),$$

uniform convergeert op $[0, \infty)$, maar niet absoluut convergeert voor een willekeurige waarde van $x \in (0, \infty)$.

(7) Beschouw de Thomae functie op $[0, 1]$ gedefinieerd door

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{I}; \quad f(x) = \frac{1}{n}, \quad x = \frac{m}{n}, \quad (m, n) = 1.$$

(a) Bereken voor elke partitie P de som $L(P, f)$.
(b) Toon aan dat voor elke $\varepsilon > 0$ hooguit eindig veel punten $x \in [0, 1]$ bestaan waar $f(x) > \varepsilon$.
(c) Laat zien dat voor elke $\varepsilon > 0$ een partitie P bestaat met $U(P, f) \leq \varepsilon$.
(d) Laat zien dat f Riemann integreerbaar is.
(e) Bepaal $\int_0^1 f(x)\, dx$.